POLITECHNIKA OPOLSKA
WYDZIAŁ BUDOWNICTWA I ARCHITEKTURY
KATEDRA MECHANIKI, KONSTRUKCJI BUDOWLANYCH I INŻYNIERSKICH

Rok studiów I, Semestr 2,
Studia niestacjonarne, **drugiego stopnia**
Rok akademicki 2018 / 2019

ĆWICZENIE PROJEKTOWE Z PRZEDMIOTU

KONSTRUKCJE POWIERZCHNIOWE I CIENKOŚCIENNE

dla studenta ....

TEMAT: ELEMENTY ROZWIĄZANIA KONSTRUKCJI POWŁOKOWEJ

TREŚĆ ĆWICZENIA:

Dla powłoki walcowej projektowanej z przeznaczeniem na zbiornik na ciecz / paliwo płynne / ropę - wyznaczyć siły przekrojowe i przemieszczenia od następujących oddziaływań:

- ciężar własny (z dachem) /* /**,
- parcie cieczy /* /**,
- wpływy środowiskowe (obciążenie wiatrem, śnieg) /* /**,
- temperatura /**.

/* należy wykonać obliczenia wg rozwiązań analitycznych (wymagany zakres obliczeń)

/** należy wykonać obliczenia w programie ROBOT (zadanie dodatkowe)

Wykonać projekt wstępny powłoki trzonu zbiornika wg PN-EN 1993-1-6

<u>Dane do obliczeń:</u>

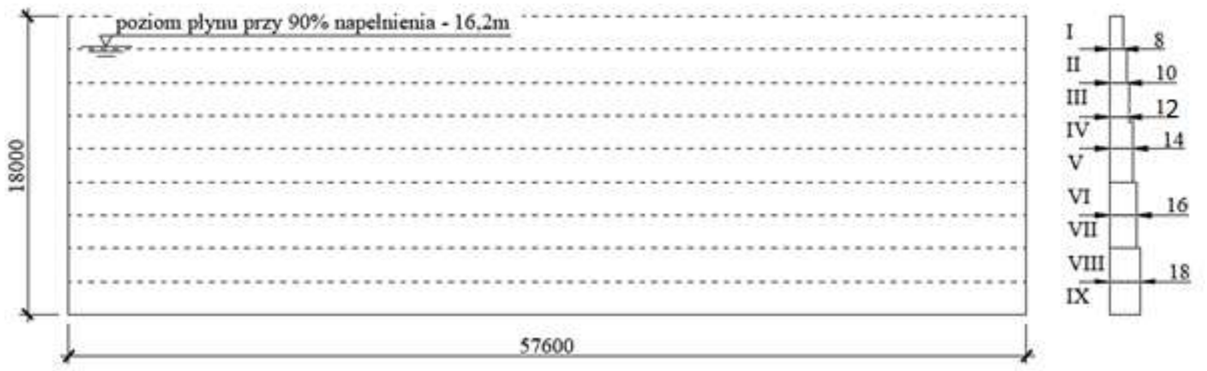
- pojemność V = **46903,7** [m^3]
- średnica wewnętrzna płaszcza $d_{w\_pł}$ = **57,6** [m]
- wysokość płaszcza $h_{pł}$ = **18,0** [m]
- liczba pierścieni płaszcza n = **9** [szt.]
- grubości pierścieni płaszcza $t_{pł}$ = **18, 18, 16, 16, 14, 14, 12, 10, 8** [mm]
- grubości pierścieni dna t_{dna} = **12 / 18** [mm]
- materiał stal **S275**
- lokalizacja **Opole**

Termin oddania ćwiczenia: **zajęcia nr 9**

Opole, ………/ ….. / ………… ....
(data) (podpis)

I. Geometria powłoki walcowej

1. Schemat zbiornika



2. Równanie wektorowe powierzchni środkowej

$$\vec{r} = a_1[cos(u^2)\vec{\imath} + sin(u^2)\vec{\jmath}] + u^1[cos(u^2+\alpha)\vec{\imath} + sin(u^2+\alpha)\vec{\jmath}]cos\beta + u^1 sin\beta\vec{k}$$

$$dla\ powłoki\ walcowej - \ \alpha = 0°;\ \ \beta = 90°;\ \ a_1 - promień\ powłoki = \frac{57,6}{2} = 28,8m$$

$$\vec{r} = a_1[cos(u^2)\vec{\imath} + sin(u^2)\vec{\jmath}] + u^1\vec{k}$$

3. Kowariantne wektory bazy

$$\vec{r}_i = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u^i};\quad \vec{r}_1 = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u^1} = \vec{k};\quad \vec{r}_2 = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u^2} = a_1[-sin(u^2)\vec{\imath} + cos(u^2)\vec{\jmath}];$$

4. Współczynniki pierwszej formy różniczkowej

$$g_{ij} = \vec{r}_i \cdot \vec{r}_j$$

$$g_{11} = \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1 = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$$

$$g_{12} = \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \vec{k}\cdot a_1[-sin(u^2)\vec{\imath} + cos(u^2)\vec{\jmath}] = 0$$

$$g_{21} = \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_1 = a_1[-sin(u^2)\vec{\imath} + cos(u^2)\vec{\jmath}]\cdot\vec{k} = 0$$

$$\begin{aligned} g_{22} = \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_2 &= a_1[-sin(u^2)\vec{\imath} + cos(u^2)\vec{\jmath}]\cdot a_1[-sin(u^2)\vec{\imath} + cos(u^2)\vec{\jmath}] = \\ &= [a_1 cos(u^2)\vec{\jmath} - a_1 sin(u^2)\vec{\imath}]^2 = \\ &= a_1^2\cos^2(u^2)\vec{\jmath} + a_1^2\sin^2(u^2)\vec{\imath} - 2a_1 cos(u^2)\vec{\jmath}\cdot a_1 sin(u^2)\vec{\imath} = a_1^2 = \\ &= 829,44m^2 \end{aligned}$$

$$g_{ij} = \vec{r}_i\cdot\vec{r}_j = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 829,44 \end{bmatrix}$$

$$g = \det(g_{ij}) = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = g_{11}\cdot g_{22} - g_{12}\cdot g_{21} = 1\cdot a_1^2 - 0\cdot 0 = a_1^2 = 829,44m^2$$

5. Kowariantny tensor metryczny

$$g^{ij} = \vec{r}^i\cdot\vec{r}^j = \frac{1}{\det(g_{ij})}\cdot\begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix} - dopełnienie\ algebraiczne\ obiektu\ g_{ij}$$

$$dopełnieniem\ algebraicznym\ macierzy\ nazywamy\ macierz\ odwrotną$$

$$g^{ij} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(g_{ij})}\cdot\begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{a_1^2}\cdot\begin{bmatrix} a_1^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_1^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,0012 \end{bmatrix}$$

$$G = \det(g^{ij}) = 0,0012m$$

6. Jednostkowy wektor normalny $\vec{m}$

$$\sqrt{g}\cdot\vec{m}=\vec{r}_1\times\vec{r}_2=\vec{k}\times a_1[-sin(u^2)\vec{\imath}+cos(u^2)\vec{\jmath}]=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 1\\ -a_1 sin(u^2) & a_1 cos(u^2) & 0\end{vmatrix}$$

$$=\left[\begin{vmatrix}0 & 1\\ a_1 cos(u^2) & 0\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}0 & 1\\ -a_1 sin(u^2) & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & 0\\ -a_1 sin(u^2) & a_1 cos(u^2)\end{vmatrix}\right]$$

$$=[-a_1 cos(u^2)\vec{\imath},\quad -a_1 sin(u^2)\vec{\jmath}\,,\quad 0\vec{k}]$$

$$\vec{m}=\frac{\vec{r}_1\times\vec{r}_2}{\sqrt{g}}=\frac{-a_1 cos(u^2)\vec{\imath}-a_1 sin(u^2)\vec{\jmath}}{\sqrt{a_1^2}}=-cos(u^2)\vec{\imath}-sin(u^2)\vec{\jmath}$$

$$\vec{m}_i=\frac{\partial\vec{m}}{\partial u^i};\quad \vec{m}_1=\frac{\partial\vec{m}}{\partial u^1}=0;\quad \vec{m}_2=\frac{\partial\vec{m}}{\partial u^2}=sin(u^2)\vec{\imath}-cos(u^2)\vec{\jmath}$$

7. Współczynniki drugiej formy różniczkowej

$$b_{ij}=-\vec{r}_i\cdot\vec{m}_j$$

$$b_{11}=-\vec{r}_1\cdot\vec{m}_1=-\vec{k}\cdot 0=0$$

$$b_{12}=-\vec{r}_1\cdot\vec{m}_2=-\vec{k}\cdot sin(u^2)\vec{\imath}-cos(u^2)\vec{\jmath}=0$$

$$b_{21}=-\vec{r}_2\cdot\vec{m}_1=-a_1[-sin(u^2)\vec{\imath}+cos(u^2)\vec{\jmath}]\cdot 0=0$$

$$b_{22}=-\vec{r}_2\cdot\vec{m}_2=-a_1[-sin(u^2)\vec{\imath}+cos(u^2)\vec{\jmath}]\cdot[sin(u^2)\vec{\imath}-cos(u^2)\vec{\jmath}]$$

$$=-a_1[-\sin^2(u^2)\vec{\imath}-\cos^2(u^2)\vec{\jmath}]=a_1=28{,}8m$$

$$b_{ij}=-\vec{r}_i\cdot\vec{m}_j=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 28{,}8\end{bmatrix}$$

$$b=\det(b_{ij})=0$$

8. Kowariantne współczynniki drugiej formy różniczkowej

$$b^{kl}=b_{ij}\cdot g^{ik}\cdot g^{jl}=b_{11}\cdot g^{1k}\cdot g^{1l}+b_{12}\cdot g^{1k}\cdot g^{2l}+b_{21}\cdot g^{2k}\cdot g^{1l}+b_{22}\cdot g^{2k}\cdot g^{2l}$$

$$b^{11}=b_{11}\cdot g^{11}\cdot g^{11}+b_{12}\cdot g^{11}\cdot g^{21}+b_{21}\cdot g^{21}\cdot g^{11}+b_{22}\cdot g^{21}\cdot g^{21}=$$

$$=0\cdot 1\cdot 1+0\cdot 1\cdot 0+0\cdot 0\cdot 1+a_1\cdot 0\cdot 0=0$$

$$b^{12}=b_{11}\cdot g^{11}\cdot g^{12}+b_{12}\cdot g^{11}\cdot g^{22}+b_{21}\cdot g^{21}\cdot g^{12}+b_{22}\cdot g^{21}\cdot g^{22}=$$

$$=0\cdot 1\cdot 0+0\cdot 1\cdot\frac{1}{a_1^2}+0\cdot 0\cdot 0+a_1\cdot 0\cdot\frac{1}{a_1^2}=0$$

$$b^{21}=b_{11}\cdot g^{12}\cdot g^{11}+b_{12}\cdot g^{12}\cdot g^{21}+b_{21}\cdot g^{22}\cdot g^{11}+b_{22}\cdot g^{22}\cdot g^{21}=$$

$$=0\cdot 0\cdot 1+0\cdot 0\cdot 0+0\cdot\frac{1}{a_1^2}\cdot 1+a_1\cdot\frac{1}{a_1^2}\cdot 0=0$$

$$b^{22}=b_{11}\cdot g^{12}\cdot g^{12}+b_{12}\cdot g^{12}\cdot g^{22}+b_{21}\cdot g^{22}\cdot g^{12}+b_{22}\cdot g^{22}\cdot g^{22}=$$

$$=0\cdot 0\cdot 0+0\cdot 0\cdot\frac{1}{a_1^2}+0\cdot\frac{1}{a_1^2}\cdot 0+a_1\cdot\frac{1}{a_1^2}\cdot\frac{1}{a_1^2}=\frac{1}{a_1^3}=\frac{1}{28{,}8^3}=0{,}0000419m$$

$$b^{kl}=b_{ij}\cdot g^{ik}\cdot g^{jl}=\begin{bmatrix}b^{11} & b^{12}\\ b^{21} & b^{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{1}{a_1^3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0{,}0000419\end{bmatrix}$$

$$B=\det(b^{kl})=0$$

9. Mieszane współczynniki drugiej formy różniczkowej

$$b_j^k = b_{ij} \cdot g^{ik} = b_{1j} \cdot g^{1k} + b_{2j} \cdot g^{2k}$$

$$b_1^1 = b_{11} \cdot g^{11} + b_{21} \cdot g^{21} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$$

$$b_2^1 = b_{12} \cdot g^{11} + b_{22} \cdot g^{21} = 0 \cdot 1 + a_1 \cdot 0 = 0$$

$$b_1^2 = b_{11} \cdot g^{12} + b_{21} \cdot g^{22} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{a_1^2} = 0$$

$$b_2^2 = b_{12} \cdot g^{12} + b_{22} \cdot g^{22} = 0 \cdot 0 + a_1 \cdot \frac{1}{a_1^2} = \frac{1}{a_1} = 0{,}035m$$

$$b_j^k = b_{ij} \cdot g^{ik} = \begin{bmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0{,}035 \end{bmatrix}$$

$$BB = \det(b_j^k) = 0$$

10. Współczynniki trzeciej formy różniczkowej

$$c_{ij} = \vec{m}_i \cdot \vec{m}_j$$

$$c_{11} = \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_1 = 0 \cdot 0 = 0$$

$$c_{12} = \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 = 0 \cdot [sin(u^2)\vec{\imath} - cos(u^2)\vec{\jmath}] = 0$$

$$c_{21} = \vec{m}_2 \cdot \vec{m}_1 = [sin(u^2)\vec{\imath} - cos(u^2)\vec{\jmath}] \cdot 0 = 0$$

$$c_{22} = \vec{m}_2 \cdot \vec{m}_2 = [sin(u^2)\vec{\imath} - cos(u^2)\vec{\jmath}] \cdot [sin(u^2)\vec{\imath} - cos(u^2)\vec{\jmath}] = 1$$

$$c_{ij} = \vec{m}_i \cdot \vec{m}_j = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c = \det\left(c_{ij}\right) = 0$$

11. Krzywizna Gaussa

$$K = \frac{b}{g} = \frac{0}{a_1^2} = 0$$

12. Krzywizna średnia

$$H = \frac{1}{2}\left(b_{ij} \cdot g^{ij}\right) = \frac{1}{2}\left(b_{1j} \cdot g^{1j} + b_{2j} \cdot g^{2j}\right) = \frac{1}{2}(b_{11} \cdot g^{11} + b_{12} \cdot g^{12} + b_{21} \cdot g^{21} + b_{22} \cdot g^{22})$$

$$= \frac{1}{2}\left(0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + a_1 \cdot \frac{1}{a_1^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot \frac{1}{a_1^2} = \frac{1}{2 \cdot a_1} = \frac{1}{2 \cdot 28{,}8}$$

$$= 0{,}0174m$$

13. Symbole Christofela

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left[\frac{\partial g^{lj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g^{li}}{\partial u^j} - \frac{\partial g^{ij}}{\partial u^l}\right]$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{1l} \left[\frac{\partial g^{l1}}{\partial u^1} + \frac{\partial g^{l1}}{\partial u^1} - \frac{\partial g^{11}}{\partial u^l}\right] = \frac{1}{2} g^{11} \left[\frac{\partial g^{11}}{\partial u^1} + \frac{\partial g^{11}}{\partial u^1} - \frac{\partial g^{11}}{\partial u^1}\right] + \frac{1}{2} g^{12} \left[\frac{\partial g^{21}}{\partial u^1} + \frac{\partial g^{21}}{\partial u^1} - \frac{\partial g^{11}}{\partial u^2}\right] = 0$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} g^{2l} \left[\frac{\partial g^{l1}}{\partial u^1} + \frac{\partial g^{l1}}{\partial u^1} - \frac{\partial g^{11}}{\partial u^l}\right] = \frac{1}{2} g^{21} \left[\frac{\partial g^{11}}{\partial u^1} + \frac{\partial g^{11}}{\partial u^1} - \frac{\partial g^{11}}{\partial u^1}\right] + \frac{1}{2} g^{22} \left[\frac{\partial g^{21}}{\partial u^1} + \frac{\partial g^{21}}{\partial u^1} - \frac{\partial g^{11}}{\partial u^2}\right] = 0$$

$$\Gamma_{12}^{1}=\frac{1}{2}g^{1l}\left[\frac{\partial g^{l2}}{\partial u^{1}}+\frac{\partial g^{l1}}{\partial u^{2}}-\frac{\partial g^{11}}{\partial u^{l}}\right]=\frac{1}{2}g^{11}\left[\frac{\partial g^{12}}{\partial u^{1}}+\frac{\partial g^{11}}{\partial u^{2}}-\frac{\partial g^{11}}{\partial u^{1}}\right]+\frac{1}{2}g^{12}\left[\frac{\partial g^{22}}{\partial u^{1}}+\frac{\partial g^{21}}{\partial u^{2}}-\frac{\partial g^{12}}{\partial u^{2}}\right]=0$$

$$\Gamma_{12}^{2}=\frac{1}{2}g^{2l}\left[\frac{\partial g^{l2}}{\partial u^{1}}+\frac{\partial g^{l1}}{\partial u^{2}}-\frac{\partial g^{11}}{\partial u^{l}}\right]=\frac{1}{2}g^{21}\left[\frac{\partial g^{12}}{\partial u^{1}}+\frac{\partial g^{11}}{\partial u^{2}}-\frac{\partial g^{11}}{\partial u^{1}}\right]+\frac{1}{2}g^{22}\left[\frac{\partial g^{22}}{\partial u^{1}}+\frac{\partial g^{21}}{\partial u^{2}}-\frac{\partial g^{12}}{\partial u^{2}}\right]=0$$

$$\Gamma_{21}^{1}=\frac{1}{2}g^{1l}\left[\frac{\partial g^{l1}}{\partial u^{2}}+\frac{\partial g^{l2}}{\partial u^{1}}-\frac{\partial g^{21}}{\partial u^{l}}\right]=\frac{1}{2}g^{11}\left[\frac{\partial g^{11}}{\partial u^{2}}+\frac{\partial g^{12}}{\partial u^{1}}-\frac{\partial g^{21}}{\partial u^{1}}\right]+\frac{1}{2}g^{12}\left[\frac{\partial g^{21}}{\partial u^{2}}+\frac{\partial g^{22}}{\partial u^{1}}-\frac{\partial g^{21}}{\partial u^{2}}\right]=0$$

$$\Gamma_{21}^{2}=\frac{1}{2}g^{2l}\left[\frac{\partial g^{l1}}{\partial u^{2}}+\frac{\partial g^{l2}}{\partial u^{1}}-\frac{\partial g^{21}}{\partial u^{l}}\right]=\frac{1}{2}g^{21}\left[\frac{\partial g^{11}}{\partial u^{2}}+\frac{\partial g^{12}}{\partial u^{1}}-\frac{\partial g^{21}}{\partial u^{1}}\right]+\frac{1}{2}g^{22}\left[\frac{\partial g^{21}}{\partial u^{2}}+\frac{\partial g^{22}}{\partial u^{1}}-\frac{\partial g^{21}}{\partial u^{2}}\right]=0$$

$$\Gamma_{22}^{1}=\frac{1}{2}g^{1l}\left[\frac{\partial g^{l2}}{\partial u^{2}}+\frac{\partial g^{l2}}{\partial u^{2}}-\frac{\partial g^{22}}{\partial u^{l}}\right]=\frac{1}{2}g^{11}\left[\frac{\partial g^{12}}{\partial u^{2}}+\frac{\partial g^{12}}{\partial u^{2}}-\frac{\partial g^{22}}{\partial u^{1}}\right]+\frac{1}{2}g^{12}\left[\frac{\partial g^{22}}{\partial u^{2}}+\frac{\partial g^{22}}{\partial u^{2}}-\frac{\partial g^{22}}{\partial u^{2}}\right]=0$$

$$\Gamma_{22}^{2}=\frac{1}{2}g^{2l}\left[\frac{\partial g^{l2}}{\partial u^{2}}+\frac{\partial g^{l2}}{\partial u^{2}}-\frac{\partial g^{22}}{\partial u^{l}}\right]=\frac{1}{2}g^{21}\left[\frac{\partial g^{12}}{\partial u^{2}}+\frac{\partial g^{12}}{\partial u^{2}}-\frac{\partial g^{22}}{\partial u^{1}}\right]+\frac{1}{2}g^{22}\left[\frac{\partial g^{22}}{\partial u^{2}}+\frac{\partial g^{22}}{\partial u^{2}}-\frac{\partial g^{22}}{\partial u^{2}}\right]=0$$

Ze względu na fakt, iż wszystkie współczynniki I formy różniczkowej są stałe, ich pochodne są równe 0. Stąd symbole Christofela II rodzaju są również równe zeru.

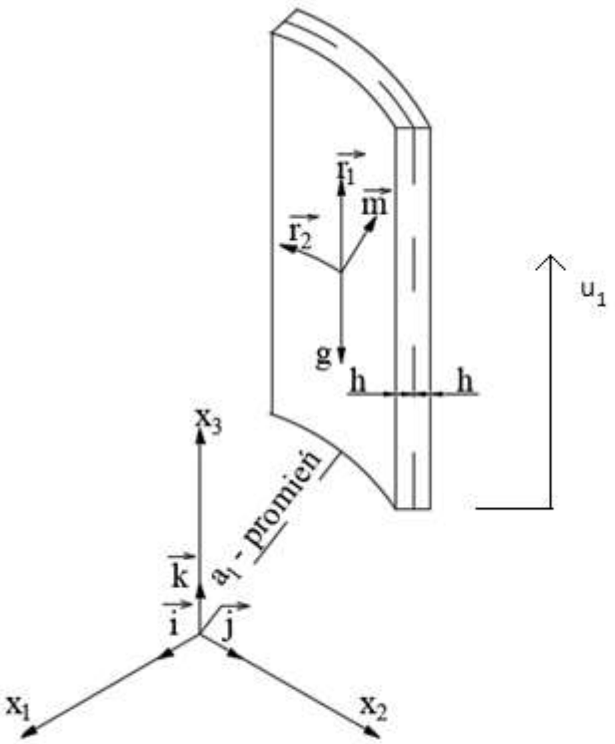
II. Zestawienie obciążeń

1. Transformacja obciążeń

$$\vec{P}=\vec{\imath}\cdot x_1+\vec{\jmath}\cdot x_2+\vec{k}\cdot x_3 \quad - \quad \textit{obciążania w układzie kartezjańskim}$$

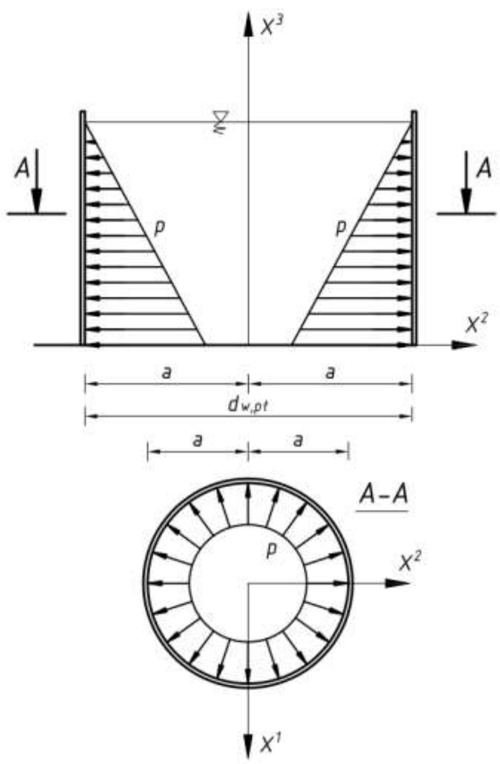
$$\vec{P}=P_1\cdot\vec{r_1}+P_2\cdot\vec{r_2}+P_3\cdot\vec{m} \quad - \quad \textit{obciążania w układzie krzywoliniowym}$$

$$\vec{P}=\vec{P} \;\rightarrow\; \vec{\imath}\cdot x_1+\vec{\jmath}\cdot x_2+\vec{k}\cdot x_3=P_1\cdot\vec{r_1}+P_2\cdot\vec{r_2}+P_3\cdot\vec{m}$$



obciążenia pionowe (ciężar własny, dach, śnieg)

$x_1 = x_2 = 0; \qquad x_3 \neq 0;$



obciążenia poziome (ciężar własny, dach, śnieg)

$x_1 \neq 0;\ x_2 \neq 0; \qquad x_3 = 0;$

$$\vec{P}=\vec{P}\ \rightarrow\ \ \vec{\imath}\cdot 0+\vec{\jmath}\cdot 0+\vec{k}\cdot x_3=P_1\cdot\vec{k}+$$
$$+P_2\cdot a_1[-sin(u^2)\vec{\imath}+cos(u^2)\vec{\jmath}\,]+$$
$$+P_3\cdot[-cos(u^2)\vec{\imath}-sin(u^2)\vec{\jmath}]$$
$$\vec{k}\cdot x_3=P_1\cdot\vec{k}+[-P_2\cdot a_1\cdot sin(u^2)-$$
$$-P_3\cdot cos(u^2)]\,\vec{\imath}+[P_2\cdot a_1\cdot cos(u^2)-$$
$$-P_3\cdot sin(u^2)]\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{\imath}\cdot 0=\vec{\imath}[-P_2\cdot a_1\cdot sin(u^2)-P_3\cdot cos(u^2)]$$
$$\vec{\jmath}\cdot 0=\vec{\jmath}[P_2\cdot a_1\cdot cos(u^2)-P_3\cdot sin(u^2)]$$
$$\vec{k}\cdot x_3=\vec{k}\cdot P_1$$

$$\begin{cases}0=[-P_2\cdot a_1\cdot sin(u^2)-P_3\cdot cos(u^2)]\\ 0=[P_2\cdot a_1\cdot cos(u^2)-P_3\cdot sin(u^2)]\end{cases}$$
$$\vdots$$
$$\begin{cases}P_2=0\\ P_3=0\end{cases}$$
$$P_1=x_3$$

$$\vec{P}=\vec{P}\ \rightarrow\ \ \vec{\imath}\cdot x_1+\vec{\jmath}\cdot x_2+\vec{k}\cdot 0=P_1\cdot\vec{k}+$$
$$+P_2\cdot a_1[-sin(u^2)\vec{\imath}+cos(u^2)\vec{\jmath}\,]+$$
$$+P_3\cdot[-cos(u^2)\vec{\imath}-sin(u^2)\vec{\jmath}]$$
$$\vec{\imath}\cdot x_1+\vec{\jmath}\cdot x_2=P_1\cdot\vec{k}+[-P_2\cdot a_1\cdot sin(u^2)-$$
$$-P_3\cdot cos(u^2)]\,\vec{\imath}+[P_2\cdot a_1\cdot cos(u^2)-$$
$$-P_3\cdot sin(u^2)]\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{\imath}\cdot x_1=\vec{\imath}[-P_2\cdot a_1\cdot sin(u^2)-P_3\cdot cos(u^2)]$$
$$\vec{\jmath}\cdot x_2=\vec{\jmath}[P_2\cdot a_1\cdot cos(u^2)-P_3\cdot sin(u^2)]$$
$$\vec{k}\cdot 0=\vec{k}\cdot P_1$$

$$\begin{cases}x_1=[-P_2\cdot a_1\cdot sin(u^2)-P_3\cdot cos(u^2)]\\ x_2=[P_2\cdot a_1\cdot cos(u^2)-P_3\cdot sin(u^2)]\end{cases}$$
$$\vdots$$
$$\begin{cases}P_2=0\\ P_3=-x_1\end{cases}$$
$$P_1=0$$

2. Obciążenia stałe (ciężar płaszcza i dachu)

$$P_{płaszcz}=\begin{cases}P_1=x_3=-\gamma_s\cdot 2\cdot h\ \left[\frac{kN}{m^2}\right]\\ 0\\ 0\end{cases}$$
$$h_{pp}=\frac{h_{pł}}{n}=\frac{18}{9}=2m;$$
$$u_1=[0,2,2,4,4,6,6,8,8,10,10,12,12,14,14,16,16,18]$$
$$x_1=[1.41,1.41,1.41,1.41,1.26,1.26,1.26,1.26,1.10,1.10,1.10,1.10,0.94,0.94,0.79,0.79,0.63,0.63]$$
$$P_{dach}=\begin{cases}P_1=x_3=-g_d=-2{,}0\,\frac{kN}{m^2}\\ 0\\ 0\end{cases}$$

3. Parcie hydrostatyczne

$$P_{hydro}=\begin{cases}0\\ 0\\ P_3=-x_1=-\gamma_c\cdot(h_w-u_1)\ \left[\frac{kN}{m^2}\right]\end{cases}$$
$$x_3=-[126.4,110.8,110.8,95.2,95.2,79.6,79.6,64.0,64.0,48.4,48.4,32.8,32.8,17.2,17.2,1.6,1.6,0]$$

4. Obciążenie wiatrem
Lokalizacja: Opole, położenie n.p.m. 150m

$$q_b=0{,}5\cdot\rho\cdot v_b^2=0{,}5\cdot 1{,}25\cdot 22^2=302{,}5\ \frac{N}{m^2}$$
$$q_p(z)=C_e(z)\cdot q_b=2{,}3\cdot\left(\frac{18}{10}\right)^{0{,}24}\cdot 302{,}5=801{,}0\ \frac{N}{m^2}$$

$$c_{pe} = c_{p0} \cdot \psi_{\lambda\alpha} = 1{,}0 \cdot 1{,}0 = 1{,}0 - dla\ kąta\ \alpha = 0°$$

$$C_w - PN - EN - 1993 - 4 - 1\ pkt\ 5.3.2.5.$$

$$C_b = 0{,}6$$

$$C_w = \frac{2{,}2}{1{,}0 + 0{,}1 \cdot \sqrt{C_b \cdot \frac{r}{l} \cdot \sqrt{\frac{r}{t}}}} = \frac{2{,}2}{1{,}0 + 0{,}1 \cdot \sqrt{0{,}6 \cdot \frac{28{,}8}{18} \cdot \sqrt{\frac{28{,}8}{0{,}5 * (0{,}018 + 0{,}008)}}}} = 1{,}32$$

$$q_{ed} = c_{pe} \cdot \frac{q_p(z)}{C_w} = 1{,}0 \cdot \frac{801{,}0}{1{,}32} = 0{,}61\ \frac{kN}{m^2}$$

$$P_{wiatr} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ P_3 = -x_1 = q_{ed} = 0{,}61\ \frac{kN}{m^2} \end{cases}$$

5. Obciążenie śniegiem
   Lokalizacja: Opole, położenie n.p.m. 150m
   Strefa 2

$$s_k = 0{,}9 \frac{kN}{m^2}; \quad s = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}0 \cdot 1{,}0 = 0{,}72 \frac{kN}{m^2};$$

$$P_{śnieg} = \begin{cases} P_1 = x_3 = -s = -0{,}72 \frac{kN}{m^2} \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

III. Stan błonowy – siły i przemieszczenia

1. Ogólne równania równowagi

$$N^{ij}|_i - Q^i b_i^j + P^j = 0; \qquad N^{ij} b_{ij} + Q^j|_j + P^3 = 0; \qquad M^{ij}|_i - Q^j = 0$$

2. Równania równowagi cienkich powłok

$$\overline{N}^{ij}|_i + P^j = 0; \qquad \overline{N}^{ij} b_{ij} + P^3 = 0; \qquad M^{ij}|_i = 0$$

3. Ostateczne równania równowagi powłoki walcowej

$$\overline{N}^{11}_{,1} + \overline{N}^{21}_{,2} + P^1 = 0; \qquad \overline{N}^{12}_{,1} + \overline{N}^{22}_{,2} + P^2 = 0; \qquad \overline{N}^{22} \cdot a + P^3 = 0$$

4. Siły wewnętrze (południkowe – ciężar własny) – wielkości tensorowe

$$P_{płaszcz} = \begin{cases} P_1 = x_3 = -\gamma_s \cdot 2 \cdot h \ \left[\frac{kN}{m^2}\right] \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{N}^{11}_{,1} + \overline{N}^{21}_{,2} - 2h \cdot \gamma_s = 0 \\ \overline{N}^{12}_{,1} + \overline{N}^{22}_{,2} = 0 \\ \overline{N}^{22} \cdot a = 0 \quad / a \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{N}^{11}_{,1} + \overline{N}^{21}_{,2} - 2h \cdot \gamma_s = 0 \\ \overline{N}^{12}_{,1} = -\overline{N}^{22}_{,2} = 0 \\ \overline{N}^{22} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{N}^{11}_{,1} = 2h \cdot \gamma_s \\ \overline{N}^{12}_{,1} = 0 \\ \overline{N}^{22} = 0 \end{cases}$$

$$\overline{N}^{11} = \int 2h \cdot \gamma_s du^1 = 2h \cdot \gamma_s \cdot u^1 + C_1(u^1)$$ Korzystając z warunku brzegowego $\overline{N}^{11}(u^1 = L) = 0$

$$0 = 2h \cdot \gamma_s \cdot L + C_1 \quad \rightarrow \quad C_1 = -2h \cdot \gamma_s \cdot L$$

Ostatecznie otrzymano:

$$\overline{N}^{11} = 2h \cdot \gamma_s \cdot u^1 - 2h \cdot \gamma_s \cdot L$$

$$\overline{N}^{11} = 2h \cdot \gamma_s \cdot (u^1 - L)$$

Pozostałe siły pionowe obliczyć analogicznie a wyniki przedstawić w tabeli zbiorczej

5. Siły wewnętrzne (równoleżnikowe – parcie cieczy) – wielkości tensorowe

$$P_{hydro} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ P_3 = -x_1 = -\gamma_c \cdot (h_w - u_1) \left[\frac{kN}{m^2}\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{N}^{11}_{,1} + \overline{N}^{21}_{,2} = 0 \\ \overline{N}^{12}_{,1} + \overline{N}^{22}_{,2} = 0 \\ \overline{N}^{22} \cdot a - \gamma_c \cdot (h_w - u^1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{N}^{11}_{,1} + \overline{N}^{21}_{,2} = 0 \\ \overline{N}^{12}_{,1} + \overline{N}^{22}_{,2} = 0 \\ \overline{N}^{22} = \frac{1}{a} \cdot \gamma_c \cdot (h_w - u^1) \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{N}^{11}_{,1} + \overline{N}^{21}_{,2} = 0 \\ \overline{N}^{12}_{,1} + \left(\frac{1}{a} \cdot \gamma_c \cdot (h_w - u^1)\right)_{,2} = 0 \\ \overline{N}^{22} = \frac{1}{a} \cdot \gamma_c \cdot (h_w - u^1) \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{N}^{11}_{,1} = 0 \\ \overline{N}^{12}_{,1} = 0 \\ \overline{N}^{22} = \frac{1}{a} \cdot \gamma_c \cdot (h_w - u^1) \end{cases}$$

Pozostałe siły poziome obliczyć analogicznie a wyniki przedstawić w tabeli zbiorczej

6. Momenty zginające (płaszcz i ciecz) – wielkości tensorowe

$$\overline{M}^{ij} = 2H \cdot \frac{h^2}{3} \cdot \overline{N}^{ij}$$

$$\overline{M}^{11} = 2H \cdot \frac{h^2}{3} \cdot \overline{N}^{11} = 2 \cdot \frac{1}{2a} \cdot \frac{h^2}{3} \cdot 2h \cdot \gamma_z \cdot (u^1 - L) = \frac{2h^3}{3a} \cdot \gamma_z \cdot (u^1 - L)$$

$$\overline{M}^{12} = \overline{M}^{21} = 2H \cdot \frac{h^2}{3} \cdot \overline{N}^{21} = 0$$

$$\overline{M}^{22} = 2H \cdot \frac{h^2}{3} \cdot \overline{N}^{22} = 2 \cdot \frac{1}{2a} \cdot \frac{h^2}{3} \cdot \frac{1}{a} \cdot \gamma_c \cdot (h_w - u^1) = \frac{h^2}{3a^2} \cdot \gamma_c \cdot (h_w - u^1)$$

Pozostałe siły poziome obliczyć analogicznie a wyniki przedstawić w tabeli zbiorczej

7. Siły tnące (płaszcz i ciecz) – wielkości tensorowe

$$\overline{Q}^j = \overline{M}^{ij}\Big|_i$$

$$\overline{Q}^1 = \overline{M}^{11}\Big|_1 = 2H \cdot \frac{h^2}{3} \cdot \overline{N}^{11}\Big|_1 = 2 \cdot \frac{1}{2a} \cdot \frac{h^2}{3} \cdot \overline{N}^{11}_{,1} = 2 \cdot \frac{1}{2a} \cdot \frac{h^2}{3} \cdot \left(2h \cdot \gamma_z \cdot (u^1 - L)\right)_{,1} = 2 \cdot \frac{1}{2a} \cdot \frac{h^2}{3} \cdot 2h \cdot \gamma_z = \frac{2h^3}{3a} \cdot \gamma_z$$

$$\overline{Q}^2 = \overline{M}^{22}\Big|_2 = 2H \cdot \frac{h^2}{3} \cdot \overline{N}^{22}\Big|_2 = 2 \cdot \frac{1}{2a} \cdot \frac{h^2}{3} \cdot \overline{N}^{22}_{,2} = 2 \cdot \frac{1}{2a} \cdot \frac{h^2}{3} \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot \gamma_c \cdot (h_w - u^1)\right)_{,2} = 0$$

Pozostałe siły poziome obliczyć analogicznie a wyniki przedstawić w tabeli zbiorczej

8. Wielkości fizyczne sił

$$N_{ij}' = \sqrt{\frac{g_{jj}}{g^{ii}}}\overline{N}^{ij} \qquad M_{i1}' = -\sqrt{\frac{g \cdot g^{11}}{g^{ii}}}\overline{M}^{i2} \qquad M_{i2}' = \sqrt{\frac{g \cdot g^{22}}{g^{ii}}}\overline{M}^{i1} \qquad Q_i' = \frac{1}{\sqrt{g^{ii}}}\overline{Q}^i$$

$$N_{11}' = \sqrt{\frac{g_{11}}{g^{11}}}\overline{N}^{11} = \sqrt{\frac{1}{1}} \cdot \overline{N}^{11} = 2h\gamma_z (u^1 - L)$$

$$N_{22}' = \sqrt{\frac{g_{22}}{g^{22}}}\overline{N}^{22} = \sqrt{\frac{a^2}{\frac{1}{a^2}}} \cdot \overline{N}^{22} = a^2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \gamma_c \cdot (h_w - u^1) = a \cdot \gamma_c \cdot (h_w - u^1)$$

$$M_{21}' = -\sqrt{\frac{g \cdot g^{11}}{g^{22}}}\overline{M}^{22} = -\sqrt{\frac{a^2 \cdot 1}{\frac{1}{a^2}}} \cdot \overline{M}^{22} = -a^2 \cdot \frac{h^2}{3a^2} \cdot \gamma_c \cdot (h_w - u^1) = -\frac{h^2}{3} \cdot \gamma_c \cdot (h_w - u^1)$$

$$M_{12}' = \sqrt{\frac{g \cdot g^{22}}{g^{11}}}\overline{M}^{11} = \sqrt{\frac{a^2 \cdot \frac{1}{a^2}}{1}} \cdot \overline{M}^{11} = \frac{2h^3}{3a} \cdot \gamma_z \cdot (u^1 - L)$$

$$Q_1' = \frac{1}{\sqrt{g^{11}}}\overline{Q}^1 = \frac{1}{\sqrt{1}} \cdot \frac{2h^3}{3a} \cdot \gamma_z = \frac{2h^3}{3a} \cdot \gamma_z$$

9. Tabela wyników i wykresy

u1	siły południkowe - fizyczne									siły równoleżnikowe - fizyczne			
[m]	N11 płaszcz	N11 dach	N11 śnieg	M12 płaszcz	M12 dach	M12 śnieg	Q1 płaszcz			N22 ciecz	N22 wiatr	M21 ciecz	M21 wiatr

Wykres sił N11 – wszystkie siły w jednym układzie
Wykres Sił N22 – wszystkie siły w jednym układzie
Wykres sił M12 – wszystkie siły w jednym układzie
Wykres sił M21 – wszystkie siły w jednym układzie
Wykres sił Q – wszystkie siły w jednym układzie

10. Przemieszczenia w stanie błonowym – (związki fizyczne i geometryczne)

- Związki fizyczne (siły – odkształcenia)

$$\gamma^{ij} = \frac{1}{2Eh}\left[(1+\nu)\overline{\mathrm{N}}^{ij} - \nu\overline{\mathrm{N}}g^{ij}\right]$$

gdzie: $\overline{\mathrm{N}} = g_{ij}\overline{\mathrm{N}}^{ij}$

$$\overline{\mathrm{N}} = g_{11}\overline{\mathrm{N}}^{11} + g_{12}\overline{\mathrm{N}}^{12} + g_{21}\overline{\mathrm{N}}^{21} + g_{22}\overline{\mathrm{N}}^{22}$$

- Związki geometryczne (odkształcenia – przemieszczenia)

$$2\gamma_{ij} = w^k\big|_i g_{jk} + w^k\big|_j g_{ik} - 2b_{ij}w^3$$

$$2\gamma_{11} = w^1\big|_1 g_{11} + w^2\big|_1 g_{12} + w^1\big|_1 g_{11} + w^2\big|_1 g_{12} - 2b_{11}w^3$$

$$2\gamma_{12} = w^1\big|_1 g_{21} + w^2\big|_1 g_{22} + w^1\big|_2 g_{11} + w^2\big|_2 g_{12} - 2b_{12}w^3$$

$$2\gamma_{22} = w^1\big|_2 g_{21} + w^2\big|_2 g_{22} + w^1\big|_2 g_{21} + w^2\big|_2 g_{22} - 2b_{22}w^3$$

- fizyczne wartości przemieszczeń

$$w^1 = \frac{\left(h\gamma_s + \frac{1}{2}\nu\cdot a\cdot\gamma_c\right)\cdot\left(u^1\right)^2 - \left(2h\gamma_s\cdot L + \nu\cdot a\cdot\gamma_c\cdot h_w\right)\cdot u^1}{2Eh}$$

$$w^3 = -\frac{1}{2Eh}\left[a^2\gamma_c\cdot\left(h_w - u^1\right) - a\cdot\nu\cdot 2h\cdot\gamma_s\cdot\left(u^1 - L\right)\right]$$

- Tabela wyników i wykresy

u1	siły południkowe - fizyczne	
[m]	W1	W3

Wykres przemieszczeń w1
Wykres przemieszczeń w3

IV. Naprężenia i przemieszczenia stanu zgięciowego
V. Wymiarowanie powłoki według Eurocodu
VI. Wyniki analizy numeryczne w programie robot (zadanie dodatkowe)